

## 4.5.9 Pravděpodobnost II

**Předpoklady:** 040508

**Př. 1:** Který z výsledků hodu mincí čtyřikrát po sobě je pravděpodobnější.

a)  $r, l, r, l$

b)  $r, r, r, r$

Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné (pravděpodobnost  $0,5^4 = 0,0625$ ) při každém hodu máme přesně předepsáno, co musí padnout (v prvním případě nejdřív rub, pak líc, pak rub a naposledy líc, v druhém pokaždé rub), oba výsledky mají stejnou pravděpodobnost  $0,5 \Rightarrow$  čtyřikrát násobíme číslem  $0,5$ .

**Př. 2:** Proved' čtyři hody mincí. Po každém hodu zapiš výsledek (sleduj tedy nejen počet lidí a rubů, ale i pořadí, ve kterém padaly).

Vyšlo například  $r, r, r, l$ .

Výsledky pokusu ve třídě:

- 4 ruby padly u 4 lidí,
- 2 ruby a 2 líce padly u 14 lidí.

**Př. 3:** Vysvětli rozpor: Ačkoliv jsme zjistili, že výsledky  $r, l, r, l$  a  $r, r, r, r$  jsou stejně pravděpodobné, výsledek „2 ruby, dva líce“ padl v předchozím příkladu častěji než výsledek „4 ruby“.

„4 ruby“ je stejný výsledek jako  $r, r, r, r$  (4 ruby nemohou padnout jinak než jako  $r, r, r, r$ ).

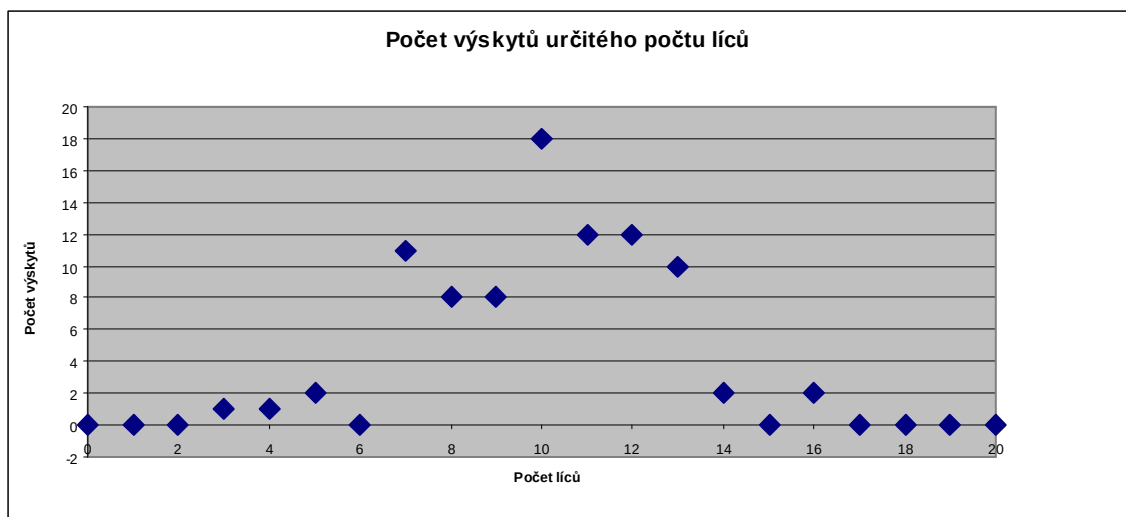
„2 ruby, 2 líce“ není stejný výsledek jako  $r, l, r, l$  (2 ruby, 2 líce mohou padnout i jinými způsoby, například  $l, r, l, r$ )

$\Rightarrow$  pravděpodobnost výsledku „2 ruby, 2 líce“ je vyšší než výsledku „4 ruby“

Jak to dopadlo v našem pokusu (výsledky, které se jeví jako „2 ruby, 2 líce“:

- $r, l, r, l$  padlo 3 krát,
- $l, r, l, r$  padlo 2 krát,
- $l, l, r, r$  padlo 4 krát,
- $r, r, l, l$  padlo 2 krát,
- $l, r, r, l$  padlo 1 krát,
- $r, l, l, r$  padlo 2 krát.

Ke stejnému závěru jsme došli už v poslední hodině. Při 20 hodech s mincí padaly častěji výsledky, které mohou padat více způsoby (s přibližně stejným počtem líců a rubů), zatímco výsledky, které mohly padnout jediným způsobem (20 líců nebo 20 rubů), vůbec nepadly.



Pravděpodobnost, že padne výsledek, kterému vyhovuje více možností, získáme tak, že sečteme pravděpodobnosti těchto možností (pokud jsou stejně pravděpodobné, tak vynásobením pravděpodobnosti počtem možností).

**Př. 4:** V roce 2007 se v České republice narodilo 114 632 dětí z toho 58475 chlapců, z toho v jihozápadních Čechách 13052 dětí z toho chlapců 6562. Urči pravděpodobnost narození chlapce v ČR. Urči pravděpodobnost narození chlapce v jihozápadních Čechách. Jaké jsou pravděpodobnosti narození dívky?

Relativní četnost narození chlapce v ČR:  $\frac{58475}{114632} = 0,510$ .

Relativní četnost narození chlapce v jihozápadních Čechách:  $\frac{6562}{13052} = 0,503$ .

Pravděpodobnost narození chlapce v ČR bude ležet blízko hodnoty 0,510 (hodnota 0,503 je spočtena z menšího počtu porodů a jen v části republiky).

**Př. 5:** Urči pravděpodobnost, že se rodině v jihozápadních Čechách narodí:  
a) dva chlapci,      b) dvě dívky,      c) nejdřív chlapec, pak dívka  
d) chlapec a dívka v libovolném pořadí.

a) dva chlapci  
 $0,503 \cdot 0,503 = 0,253009$

b) dvě dívky  
 $0,497 \cdot 0,497 = 0,247009$

c) nejdřív chlapec, pak dívka  
 $0,503 \cdot 0,497 = 0,249991$

d) chlapec a dívka v libovolném pořadí  
Výsledek můžeme získat dvěma způsoby (první chlapec, druhá dívka nebo první dívka, druhý chlapec)  
 $2 \cdot 0,503 \cdot 0,497 = 0,499982$

a) modré koule,                                      b) červené nebo modré koule,  
c) zelené a pak červené koule,              d) dvou červených koulí po sobě,  
e) dvou koulí stejné barvy ve dvou následujících tazích,  
f) koulí všech tří barev ve třech po sobě jdoucích tazích.

a) Modrých koulí je 5  $\Rightarrow$  pravděpodobnost tažení modré koule je  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ .

Červené koule jsou 3  $\Rightarrow$  pravděpodobnost tažení červené koule je  $\frac{3}{10}$ .

Červených a modrých koulí je 8  $\Rightarrow$  pravděpodobnost tažení červené nebo modré koule je  $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ .

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$
$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Dvě červené po sobě:  $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ .

Dvě modré po sobě:  $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ .

Dvě zelené po sobě:  $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$ .

Dvě libovolné barvy po sobě:  $\frac{9}{100} + \frac{25}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$ .

Pravděpodobnost, že vytáhneme modrou, pak červenou a nakonec zelenou kouli:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{100}.$$

Možností, jak vytáhnou postupně tři různé barvy je šest (mčz, mzč, čmz, čzm, zmč, zčm)  $\Rightarrow$  pravděpodobnost postupného vytažení všech tří barev:  $6 \cdot \frac{3}{100} = \frac{9}{50}$ .

**Př. 7:** Urči pravděpodobnost, že při tažení koulí v předchozím příkladu nebude ve dvou po sobě jdoucích tazích tažena modrá koule.

Možností, jak nevytáhnou dvakrát po sobě modrou kouli je strašně mnoho  $\Rightarrow$  velmi složité počítání.

Trik: Souhrnná pravděpodobnost všech možností je 1, pravděpodobnost, že dvakrát po sobě vytáhneme modrou kouli  $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow$  pravděpodobnost, že dvakrát po sobě modrou kouli nevytáhneme je  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

**Př. 8:** V osudí je 6 modrých a 4 červené koule. Koule jsou náhodně taženy a po určení barvy se nevrací do osudí. Urči pravděpodobnost vytažení:

- a) modré koule v prvním tahu,      b) modré koule v prvním a červené v druhém tahu,  
c) červené koule v druhém tahu.

a) modré koule v prvním tahu

$$\frac{6}{10}$$

b) modré koule v prvním a červené v druhém tahu

Modrá koule v prvním tahu:  $\frac{6}{10}$

Červená v druhém tahu, když v prvním byla tažena modrá:  $\frac{4}{9}$  (v osudí zbývá už jen 9 koulí z toho čtyři červené).

Modré koule v prvním a červená v druhém tahu:  $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

c) červené koule v druhém tahu

Dvě možnosti, jak můžeme táhnout červenou kouli v druhém tahu:

červená koule v prvním i v druhém tahu:  $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

modrá koule v prvním a červená v druhém:  $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

Červená koule v druhém tahu:  $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ .

**Př. 9: (Výzkumný BONUS)** Jirka hází mincí dokud nepadnou dva líce po sobě. Anežka hází mincí dokud nepadne líc a hned po něm rub. Ačkoliv pravděpodobnost, že ve dvou hodech padnou dva líce je stejná, jako pravděpodobnost, že padne nejdříve líc a potom rub, Jirka potřebuje k tomu, aby hodil své dva líce po sobě průměrně 6 hodů,

zatímco Anežka pro svůj líc následovaný rubem pouze čtyři hody. Zkus tento zdánlivý rozpor vysvětlit.

Zkusíme provést několik pokusů, budeme házet, dokud nesplníme oba požadavky (jak pro Jirku, tak pro Anežku), zaznamenejme počty hodů pro oba cíle a budeme sledovat jejich průměr.

| Záznamy jednotlivých pokusů: | Počet hodů Jirka | Počet hodů Anežka |
|------------------------------|------------------|-------------------|
| 110                          | 2                | 3                 |
| 000110                       | 5                | 6                 |
| 010011                       | 6                | 3                 |
| 00011111110                  | 5                | 11                |
| 1011                         | 4                | 2                 |
| 000010100100100100011        | 21               | 6                 |
| 001011                       | 6                | 4                 |
| 010011                       | 6                | 3                 |
| 0001011                      | 7                | 5                 |
| 000000110                    | 8                | 9                 |
| 000110                       | 5                | 6                 |
| 110                          | 2                | 3                 |
| 100011                       | 6                | 2                 |
| 110                          | 2                | 3                 |
| 00000000110                  | 10               | 11                |
| 0110                         | 3                | 4                 |
| 001110                       | 4                | 6                 |
| 0011110                      | 4                | 7                 |
| 1110                         | 2                | 4                 |
| 110                          | 2                | 3                 |
| Průměr                       | 5,5              | 4,95              |

Počet provedených pokusů nebyl dostatečný k tomu abychom se hodně přiblížili k předpokládaným hodnotám, přesto je vidět, že Anežka potřebuje v průměru méně hodů než Jirka.

Čím se pokus liší od opakovaného házení dvou hodů (kde je pravděpodobnost obojího stejná)?

Tím, že házíme dokud nehodíme to, co potřebujeme  $\Rightarrow$  prozkoumáme se, jak končily naše pokusy:

- pravděpodobnost, že Anežka získá rub po líci, pokud Jirka právě hodil druhý líc:  $\frac{1}{2}$   
(stačí, když v následujícím hoďu padne rub, líc právě padnul).
- pravděpodobnost, že Jirka získá dva líce, pokud Anežka právě hodila rub po líci:  $\frac{1}{4}$   
(musí padnout dva líce po sobě).

$\Rightarrow$  Anežka bude potřebovat průměrně méně hodů aby padl líc a rub po sobě.

**Shrnutí:**